Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année: 2012-2013
Janvier-2013

Examen d'Algébre de S-I (SMP & SMC)

Exercice 1: (4 points)
Déterminer le rang et l'ensemble des solutions du système linéaire suivant, (resoudre en fonction de la valeur de m).

$$\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y - z = -1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases}$$

Exercice 2: (6 points)
1) Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines sécrivent $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{(n-1)}$.
2) En déduire les racines de $1 + z + z^2 + + z^{(n-1)} = 0$.
3) Calculer, pour $p \in IN$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \dots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 3: (5 points)
Soit $t \in IR$, on suppose que $\sin(nt) \neq 0$.
1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(kt) X^k \text{ , avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Exercice 4: (5 points)
Décomposer dans $IR(X)$ la fraction

$$F(X) = \frac{X^4}{X^4 + 1}$$

N.B. Les téléphones portables et les calculatrices programmables ne sont pas autorisés, la communication orale, la passation de documents entre étudiants, la possession de documents non autorisés à portée de mains, l'utilisation des documents non autorisés, sont strictement interdits.

Bon_courage (*Dr. Aziz Arbai*) ■

Corrigé Examen d'algèbre

EX I
$$\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = -1 \\ x + my + z = 3(m+1). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m-1 & 1 \\ m & 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 3m+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1+2m^2-m & -1-m \\ 0 & m-1 & 2-2m & 3m+2 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - mL_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1+2m^2-m & -1-m \\ 0 & 0 & 3-m-2m^2 & 3m+1 \end{array}\right) L_3 + L_2$$

$3 - m - 2m^2 = 0 \Rightarrow -2m^2 - m + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$. il y a 2 solutions

$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-4} = 1$, et $m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3}{2}$.

- 1er Cas : si $m = 1$. le Système devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad r = 1 \text{ et } S = \emptyset.$$

- 2ème Cas : Si $m = -\frac{3}{2}$. le Système devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5/2 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow r = 2. \text{ et } S = \emptyset.$$

3ème Cas : si $m_1 \neq 1$ et $m_2 \neq -\frac{3}{2}$. alors $r = 3$.

d'ou le Système de Cramer donc S' a une et une se

Solution.

$$(S): \begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ (1-m)y + (1-2m^2+m)z = -1-m. \\ (3-m-2m^2)z = 2m+1. \end{cases}$$

$$z = \frac{2m+1}{3-m-2m^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2(3m^2+3m+2)}{(m-1)(2m+3)} \quad \text{et} \quad x = \frac{2m+1}{-2m^2-m}$$

donc $S' = \{ x(m), y(m), z(m) / \text{avec } m \in \mathbb{R} - \{1, -$

EX II

1). $z^n = 1, \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$. $k = 0, 1, 2, \dots n-1$

$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \Leftrightarrow z = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \Rightarrow k = 0, 1,$

$\Leftrightarrow z = \varepsilon^k$ avec $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

$S = \{ \varepsilon^k / k = 0, 1, 2, \dots n-1 \}$ $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

si $k = 0$ $\varepsilon^k = 1$

si $k = 1$ $\varepsilon^k = \varepsilon$.

$\vdots$ $\vdots$

si $k = n-1$ $\varepsilon^k = \varepsilon^{(n-1)}$

donc $S = \{ 1, \varepsilon, \varepsilon^2 \dots\dots \varepsilon^{(n-1)} \}$. avec $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

2) $1 + z + z^2 + \dots\dots + z^{(n-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-z^n}{1-z} = 0$ avec

$\Leftrightarrow z^n = 1$ et $z \neq 0. \Rightarrow S = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2 \dots \varepsilon^{n-1}\}$

$$1+\varepsilon^{p}+\varepsilon^{2p}+\dots\dots\ \varepsilon^{(n-1)p} = 1+\varepsilon^{p}+(\varepsilon^{p})^{2}+\dots\dots(\varepsilon^{p})^{n}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(\varepsilon^{p})^{k}.$$

③

• 1er Cas : Si $p = kn$. alors $\varepsilon^{p} = \varepsilon^{kn} = (\varepsilon^{n})^{k} = 1$.

donc $1+\varepsilon^{p}+\varepsilon^{2p}+\dots\dots+\varepsilon^{(n-1)p} = n$.

• 2ème Cas : si $\varepsilon^{p} \neq 1$.

$$1+\varepsilon^{p}+\varepsilon^{2p}+\dots\dots+\varepsilon^{(n-1)p} = 1+\varepsilon^{p}+(\varepsilon^{p})^{2}+\dots\dots+(\varepsilon^{p})^{n-1}.$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(\varepsilon^{p})^{k} = \frac{1-(\varepsilon^{p})^{n}}{1-\varepsilon^{p}} = 0 \text{ avec } \varepsilon^{p}\neq 1.$$

EX III

On a $P = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin kt\, X^{k}$ avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

①. Comme $\sin(nk) \neq 0$ $d°P = n$.

$$P = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin kt\, X^{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kt\, X^{k}$$

d'après le formule du Binôme Newton :
$$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} a^{k} b^{n-k}.$$

et la formule d'Euler $\sin kt = \dfrac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$

$$\text{donc } P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}X^{k}.$$

$$P = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{ikt}-e^{-ikt}\right)X^{k}.$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ikt} X^k - e^{-ikt} X^k \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikt} X^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-ikt} X^k.$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{it} X \right)^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{-it} X \right)^k.$$

(4)

$$= \frac{1}{2i} \left(1 + e^{it} X \right)^n - \frac{1}{2i} \left(1 + e^{-it} X \right)^n$$

Les racines $z \in \mathbb{C}$ de P vérifient .

$$\frac{1}{2i} \left(1 + e^{it} X \right)^n - \frac{1}{2i} \left(1 + e^{-it} X \right)^n = 0.$$

$$\left(1 + e^{it} X \right)^n = \left(1 + e^{-it} X \right)^n.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + e^{it} X}{1 + e^{-it} X} \right)^n = 1.$$

$$\exists k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + e^{it} X}{1 + e^{-it} X} \right) = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

$$\Rightarrow 1 + e^{it} X = \left(1 + e^{-it} X \right) . e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec } k = \{0, 1, 2, \dots, n-$$

$$\Rightarrow 1 + e^{it} X = e^{i\frac{2k\pi}{n}} + e^{-it} . e^{i\frac{2k\pi}{n}} X.$$

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 = X \left(e^{it} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{-it} \right) \quad \exists k = \{0, 1, \dots$$

$$\text{donc } P(X) = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{+it} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{-it}} \quad \exists k = \{0, 1, \dots, n-$$

racines de P sont les Complexes (5)

$$X_k = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{it} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{-it}} \quad \text{avec } k = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

(2)

$$\overline{X_k} = \frac{\overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}}{\overline{e^{it} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{-it}}} = \frac{e^{-i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{-it} - e^{-i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{it}}$$

$$\overline{X_k} = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{2k\pi}{n}} - 1\right)}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\left(e^{-it} - e^{-i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{it}\right)} = \frac{e^{-i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{-it} - e^{-i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{it}}$$

$$X_k = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}{e^{it} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{-it}}$$ donc ces complexes sont des réels

Ex IV Ex 4

$$F(x) = \frac{X^4}{X^4+1}$$

• déterminer le Partie Entier. E.

$$\begin{array}{r|l} X^4 & X^4+1 \\ \hline -X^4-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

donc $F(X) = 1 - \frac{1}{X^4+1}$ $E = 1$

• Factorisation de X^4+1 dans $(\mathbb{R})$.

$$X^4+1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = X^2 - Xe^{-i\frac{\pi}{4}} - Xe^{i\frac{\pi}{4}} + 1$$

$$X^4+1 = X^2 - X\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - X\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

$$X^4+1 = X^2 - X\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - X\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1.$$

$$X^4+1 = X^2 - X\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1.$$

$$\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1.$$
$$= X^2 - \sqrt{2}X + 1.$$

Sur $\mathbb{R}$ $X^4+1 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

(6)

donc $F(X) = \dfrac{X^4}{X^4+1} = 1 - \dfrac{1}{X^4+1}$.

$$F(X) = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

$$1 = (aX+b)(X^2+\sqrt{2}X+1) + (cX+d)(X^2-\sqrt{2}X+1)$$

$$1 = aX^3+\sqrt{2}aX^2+aX+bX^2+\sqrt{2}bX+b+cX^3-\sqrt{2}cX^2+cX+dX^2-\sqrt{2}dX+d$$

$$\Rightarrow X^3(a+c)+X^2(\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d)+X(a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d)+b+d$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0 \\ a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d=0 \\ b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-c. \quad \text{et } d=1-b \\ -\sqrt{2}c+b-\sqrt{2}c+1-b=0 \\ -c+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}+\sqrt{2}b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}c+1=0 \Rightarrow 1 = 2\sqrt{2}c \Rightarrow c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2}b-\sqrt{2}=0 \Rightarrow 2\sqrt{2}b=\sqrt{2} \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

donc $c = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $b = \dfrac{1}{2}$ et $d = \dfrac{1}{2}$.

donc $$\frac{X^4}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X-\frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

$$\frac{X^4}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2-X}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{X-2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right).$$

$$\frac{X^4}{X^4+1} = 1 - \frac{1}{X^4+1}$$

$$= 1 - \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X + \frac{1}{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X - \frac{1}{2}}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} \right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{2 - X}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} + \frac{X - 2}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} \right)$$

EL Morabet Mohcine المرابط محسن